Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité, et sur l'invention de cet instrument.

Par

H.-G. Zeuthen.

(Communiquée dans la séance du 9 décembre 1887.)

Dans mon livre sur la théorie des coniques dans l'antiquité [1]), je me suis proposé 1⁰ de retracer cette admirable théorie, qui est trop peu étudiée de nos jours par les géomètres et les historiens, découragés qu'ils sont par la forme synthétique et artificielle de l'exposé, et 2⁰ de retrouver les méthodes, plus ou moins développées, dont les grands géomètres grecs se sont servis avec plus ou moins de conscience de leur portée.

Dans mon analyse des travaux conservés on trouvera un usage continuel des coordonnées, soit que les auteurs grecs les aient employées immédiatement dans leurs énoncés ou dans leurs démonstrations, soit que cet instrument m'ait semblé commode pour mieux faire comprendre aux lecteurs modernes la connexion des résultats et la marche des démonstrations. Son usage direct ou indirect est si répandu dans ces travaux, qu'en cherchant les méthodes qui ont servi à l'invention des puis-

---

[1]) Keglesnitslæren i Oldtiden a été publié premièrement en danois dans les Mémoires de l'Académie danoise des Sciences et des Lettres, 6me Série, Classe des Sciences t. III. Il en a ensuite paru une traduction en allemand: Zeuthen: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verf., besorgt von Dr. R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1886, A. F. Høst.

santes théories qu'ils contiennent, j'ai été renvoyé avant tout à cet usage des coordonnées.

La méthode des coordonnées étant de nos jours presque inséparable de l'algèbre, le premier chapitre de mon livre contient une étude des moyens géométriques qui remplacaient chez les Grecs cette base des mathématiques modernes, et auxquels j'ai donné le nom d'algèbre géométrique. J'étudie les différences de la géométrie analytique moderne qui en doivent résulter pour la géométrie grecque, même indépendamment de la forme synthétique [1]) de la plus grande partie des travaux conservés.

Passant ensuite à l'analyse détaillée de ces travaux, et de ceux dont il n'existe encore que des extraits, j'ai montré qu'en réalité la plupart des recherches qui s'élèvent au-dessus des éléments ont pour base cette modification de la géométrie analytique, qui a pour son principal instrument les simples coordonnées orthogonales ou obliques, mais qui se sert aussi de transformations géométriques ayant beaucoup de ressemblance avec la méthode moderne des notations abrégées.

J'avoue qu'en composant mon livre, je regardais l'usage des coordonnées par les Grecs comme un fait sur lequel il ne pouvait exister aucun doute chez ceux qui connaissent l'ancienne géométrie: j'avais seulement à examiner la manière dont se faisait cet usage. Les analyses que j'ai vues de mon livre n'expriment, non plus, aucun doute à cet égard; mais plus tard j'ai appris qu'il existait déjà un mémoire de M. Günther [2]), où l'usage des coordonnées dans l'antiquité est considéré comme trop accidentel pour qu'on puisse lui attribuer aucune importance. Si M. Günther a raison, mon livre perdra une grande

[1]) J'attribue à ce mot son sens logique et correspondant à la synthèse des anciens.

[2]) Die Anfänge und Entwickelungsstadien des Coordinatenprincipies; Abhandlungen der naturforsch. Gesellsch. zu Nürnberg t. VI. Je connais ce mémoire par une traduction en italien, qui a paru dans le «Bullettino di bibliografia e di storia» de Boncompagni t. X.

partie de sa valeur. Ayant trouvé à chaque pas, dans mes recherches sur la géométrie de l'antiquité, de nouvelles confirmations de la justesse de mon point de départ, je crois que mon livre contient la meilleure réfutation des opinions de M. Günther. Néanmoins la question est trop essentielle pour l'histoire des sciences, et M. Günther trop versé dans cette histoire, pour qu'il soit permis de négliger une analyse directe de ses arguments.

Selon M. Günther, Fermat est le premier qui ait possédé cette connaissance des coordonnées et de leur utilité que j'ai revendiquée pour les anciens. A l'appui de son opinion, il cite avant tout le remarquable mémoire: *Ad locos planos et solidos isagoge*[1]), où Fermat expose une méthode générale pour la détermination des lieux qui se trouvent être des droites ou des cercles (lieux plans), ou des coniques (lieux solides).

Commençons par remarquer que l'élaboration de ce mémoire, publié 19 ans après la mort de Fermat, n'a pas probablement sur la publication de la Géométrie de Descartes une priorité aussi grande que le suppose M. Günther[2]). En parlant, dans sa lettre du 20 avril 1637 à Roberval[3]), de deux livres sur les lieux plans, et en disant qu'il les avait écrits depuis 8 ans, Fermat pense évidemment à la restitution des deux livres perdus d'Apollonius sur les lieux plans qu'il a entreprise d'après les propositions dont Pappus nous a conservé les

---

[1]) P. 1—8 des *Varia Opera Mathematica* Petri de Fermat. Je ne sais pas pourquoi M. Günther rapporte (p. 396) à la terminologie du 16[me] et 17[me] siècle les noms de lieux plans et de lieux solides, dont il n'ignore certainement pas l'origine antique. De même il rapporte le langage mathématique de Fermat au type qu'on rencontre dans Viète. Il n'a pas tort à cet égard, mais à l'endroit en question (p. 397) ce langage ne diffère guère de celui des anciens.

[2]) *Bullettino* t. X p. 395. M. Günther se rallie à cet égard à une remarque de M. Baltzer («Verhandl. der Sächs. Gesellsch. der Wissensch.», Math.-phys. Classe, Bd. XVII, p. 6).

[3]) *Varia Opera* p. 153—154.

énoncés[1]); car l'*Isagoge* ne contient pas deux livres. Dans sa restitution, Fermat ne fait usage de coordonnées que dans la seconde démonstration générale de la 5me proposition[2]) du second livre. Cette démonstration n'a nullement besoin d'avoir appartenu à la première rédaction. Il n'est pas même probable que Fermat se soit donné la peine de rédiger la première démonstration très limitée de cette proposition[3]), s'il était déjà en possession de la démonstration générale. Il ne communique celle-ci, dont il devait prévoir le grand succès qu'elle obtint réellement parmi les géomètres parisiens[4]), que dans une lettre à Roberval[5]) écrite au commencement de 1637, c'est-à-dire la même année où parut la Géométrie de Descartes. La lettre suivante, du 20 avril 1637, où il parle de sa détermination des lieux à trois et à quatre droites, et d'autres lieux solides, ne nous fournit aucun renseignement sur la question depuis quand il était en possession de ces déterminations. Il n'est donc pas permis, quant à la découverte (ou la réinvention) de la méthode des coordonnées et de son application à la détermination des lieux, d'attribuer à Fermat aucune priorité sur Descartes, qui a eu besoin, lui aussi, d'un certain espace de temps pour développer les idées qu'il a publiées en 1637. Les lettres constatent seulement qu'à cet égard, Fermat ne doit pas plus ses idées à Descartes, que Descartes ne doit les siennes à Fermat.

Même sans cette indépendance de la Géométrie de Descartes, l'*Isagoge* de Fermat, dont la rédaction définitive a eu lieu plus tard, aurait mérité toute l'attention que M. Günther veut attirer sur ce mémoire. La méthode, qui est ex-

---

1) *Varia Opera*, p. 12—43.
2) *Varia Opera*, p. 34—41.
3) *Varia Opera*, p. 33—34.
4) Voir la lettre de Roberval à Fermat, qui se trouve p. 152—153 des *Varia Opera*.
5 *Varia Opera*, p. 151—152.

posée avec une brièveté et une clarté qui en font ressortir toute la généralité et l'importance, consiste à représenter le lieu par une équation entre deux coordonnées orthogonales ou obliques; si le degré de cette équation ne dépasse pas deux, le lieu sera plan ou solide. La démonstration de ce résultat, énoncé au commencement du mémoire, fournit en même temps le moyen d'une détermination complète des différents lieux.

Fermat commence sa démonstration en établissant au moyen de figures semblables que l'équation $ax = by$ représente une droite[1]). Il prend encore pour points de départ l'équation d'un cercle rapporté à deux diamètres orthogonaux, et les équations, puisées dans les coniques d'Apollonius, d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes, d'une parabole rapportée à un diamètre et à une tangente et d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués. Il en déduit, au moyen du déplacement de l'origine, les significations de toutes les équations des deux premiers degrés, à l'exception de celles qui contiennent à la fois des termes quadratiques et le terme xy. Pour montrer la transformation qu'il faut employer dans le cas où l'équation contient tous les termes du second degré il prend pour exemple l'équation:

$$2x^2 + 2xy + y^2 = a^2,$$

qu'il remplace par:

$$(x + y)^2 + x^2 = a^2.$$

On voit donc qu'elle représente une ellipse qui a pour diamètres conjugués les droites $x + y = 0$, et $x = 0$, les coordonnées rapportées à ces diamètres étant $x\sqrt{2}$ et $x + y$. Il est clair qu'on peut procéder toujours d'une manière semblable.

---

[1]) En traduisant à tort cette simple application des éléments par l'équation $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$, M. Günther, qui est si rigoureux envers les anciens, se croit déjà ici en possession d'un exemple de l'usage cherché des coordonnées. Elle ne le devient que par les applications qui s'y joignent dans la suite du mémoire de Fermat.

Fermat n'oublie pas même le cas d'une équation homogène du second degré. Toutefois il se borne à supposer que le lieu représenté par cette équation contient un point différent de l'origine, et à démontrer qu'il contiendra alors toute la droite joignant ce point à l'origine.

En résumé, nous devons à Fermat la première discussion générale des lieux représentés par une équation du premier ou du second degré. Je crois avoir établi, dans le dixième chapitre de mon livre, que les grands géomètres grecs étaient en possession des mêmes moyens géométriques dont se sert Fermat — à l'exception de la manière plus facile d'écrire les équations — et qu'ils savaient les appliquer à la détermination des mêmes lieux; mais en tout cas on ne trouve, ni dans la littérature conservée de l'antiquité, ni même dans la Géométrie de **Descartes**, un exposé net et général de la méthode.

Fermat ne croit pas que les anciens aient obtenu leurs déterminations de lieux par une méthode aussi générale. Il est conduit à cette conclusion par le défaut de généralité de leurs énoncés des lieux[1]. Il cite à cet égard, dans une lettre à **Roberval**[2], la cinquième proposition du second livre des lieux plans d'Apollonius, que du reste il «tient une des plus belles propositions de la géométrie.» Je crois que Fermat attribue une étendue trop restreinte à l'énoncé conservé par Pappus. Selon cet énoncé, si d'un nombre quelconque de points fixes on mène à un point des droites, et que «les espèces qui en naissent» soient égales à une figure donnée, le lieu du point sera un cercle. Fermat interprète «les espèces qui en naissent» comme la somme des figures construites sur les droites et semblables à une seule figure donnée. Alors le lieu deviendrait identique à celui où la somme des carrés des

[1]) *Varia Opera,* p. 1.
[2]) *Varia Opera,* p. 151—152.

distances était donnée, et Apollonius n'aurait obtenu qu'une légère généralisation de la définition de ce lieu. Cependant l'énoncé très court admet aussi bien une autre interprétation. Les figures construites sur les différentes droites peuvent être semblables à des figures données différentes entre elles. Alors le lieu sera défini par une équation du premier degré entre les carrés des distances dont les coefficients ne sont soumis qu'à la condition d'être positifs. La proposition suppléerait alors à la proposition précédente du livre d'Apollonius, qui énonce d'une manière indirecte, mais parfaitement claire, que le lieu deviendra un cercle s'il n'est donné que deux points et si les carrés ont des coefficients quelconques de signes différents.

Le défaut de généralité qui reste encore, ici comme dans l'énoncé de la proposition 7 du premier livre, n'est pas trop grand pour être expliqué par la difficulté que les énoncés généraux causaient aux savants grecs, ou par l'usage qu'Apollonius voulait faire des propositions dont il s'agit. L'interprétation de Fermat de la 5^{me} proposition du second livre fût-elle même juste, la généralité des propositions précitées est cependant assez grande pour avoir demandé des points de vue assez généraux de la part de l'auteur.

On le voit le mieux en considérant les progrès successifs des procédés dont se sert Fermat pour donner aux démonstrations de résultats qu'il ne s'agissait plus de trouver, la même généralité qu'ont les énoncés conservés. Selon les renseignements que nous avons déjà puisés dans ses lettres, il fut de bonne heure attiré par la beauté des propositions conservées du travail d'Apollonius, et en démontrant ces propositions, ce qu'il doit avoir fait en 1629 [1], il oppose hardiment son «*Apollonium de locis planis disserentem*» aux restitutions d'autres travaux perdus d'Apollonius qui avaient été publiées par d'autres savants [2].

[1] Voir à la p. 154 des *Varia Opera*.

[2] *Varia Opera*, p. 12.

Nous avons dit que, dans cette restitution, l'application des coordonnées se borne à la seconde démonstration de la 5me proposition du second livre, dont nous venons de parler, et que probablement cette seconde démonstration est de date plus récente que les autres parties de la restitution, ou, du moins, que la première démonstration de la même proposition. Dans cette première démonstration, ainsi que dans celle de la 7me proposition du premier livre, Fermat se borne à démontrer complètement des cas beaucoup plus particuliers que les énoncés d'Apollonius, en renvoyant pour le reste à de pénibles généralisations successives. Pour la 5me proposition du second livre, il suppose même que les points donnés, dont il ne considère que trois, se trouvent sur une droite [1]).

Il semble que Fermat ne fût pas satisfait de ces démonstrations de propositions beaucoup plus générales. Il continua donc de s'en occuper. Alors il n'est pas étonnant que, guidé par les autres propositions des livres d'Apollonius sur les lieux plans, par la sixième du premier livre, qui n'est qu'un énoncé géométrique de l'équation d'une droite, et par la troisième du second livre, qui contient une forme de l'équation d'un cercle, puis par l'usage des coordonnées et par leurs transformations dans les coniques d'Apollonius, Fermat ait eu recours aux coordonnées. C'est sans doute ainsi qu'il a obtenu la démonstration générale de la 5me proposition du second livre, qu'il a communiquée dans sa première lettre de 1637 à Roberval et qu'il a ajoutée à sa restitution des lieux plans, et la nouvelle démonstration générale de la 7me proposition du premier livre, qui n'est publiée que dans l'*Isagoge* [2]). Quelques

---

[1]) Fermat, à la p. 5 de l'*Isagoge*, où il expose la démonstration générale au moyen de coordonnées, semble attribuer une telle restriction à Apollonius, ce qui doit être une réminiscence du temps où sa propre démonstration se bornait à ce cas, car on n'en trouve rien dans l'énoncé conservé par Pappus.

[2]) *Varia Opera*, p. 2.

remarques qui accompagnent ce dernier travail[1]) montrent qu'il regarde la démonstration de ces deux propositions générales et leur généralisation ultérieure comme le plus beau résultat de sa méthode, du moins dans le domaine des lieux plans.

Nous avons insisté sur ce développement successif des idées de Fermat, dont témoignent ses lettres, soit pour l'intérêt qu'il offre par lui-même, soit à cause de l'appui qu'il donne aux opinions énoncées dans mon livre sur la manière dont les anciens ont trouvé les mêmes théorèmes. Aucune méthode ne peut leur être attribuée avec plus de probabilité que celle que Fermat, leur élève presque immédiat dans ces matières malgré le nombre des siècles qui les séparent, était contraint à retrouver pour s'élever à la généralité des énoncés conservés.

Malgré la perte des livres des anciens sur les lieux solides, nous n'avons besoin ni de probabilités ni d'hypothèses pour leur attribuer l'application des coordonnées à la détermination de ces lieux, et pour constater leur influence sur la méthode de Fermat et sur celle de Descartes. En effet, nous avons vu que Fermat prend pour points de départ les équations dont les anciens déduisaient les propriétés des coniques, et auxquelles il fallait évidemment avoir recours pour démontrer qu'un lieu est une conique. Aux méthodes employées par Apollonius appartiennent aussi le déplacement de l'origine et la réduction d'une expression du premier degré à la distance d'un point à une droite multipliée par un facteur constant, ou bien les mêmes transformations de coordonnées dont se sert Fermat. Quand même l'usage des coordonnées se présente moins immédiatement dans l'oeuvre d'Apollonius, il n'en est pas moins effectif. Apollonius surmonte à cet égard une plus grande difficulté que Fermat et Descartes; car ces deux grands géomètres se bornent à rapporter, l'un une

[1]) l. c. p. 2 et 5

courbe générale du second ordre, l'autre le *lieu à quatre droites* à un système de deux diamètres conjugués, ce qui est, selon nous, la partie la plus facile de la réduction. Pour ce qui reste encore ils se contentent d'un emprunt au premier livre d'Apollonius, qui contient la transformation de coordonnées par laquelle on voit qu'une courbe ayant, dans un système de coordonnées obliques, l'équation $y^2 = x\left(p \mp \frac{p}{a}x\right)$ peut être représentée dans un système orthogonal par une équation de la même forme[1]).

Il paraît que Fermat a pris occasion d'un problème ancien pour appliquer sa méthode aux lieux solides. On voit par une lettre que nous avons déjà citée[2]) qu'en 1637 Fermat était depuis longtemps en possession de la détermination du *lieu à trois droites*, et qu'il avait trouvé aussi celle du *lieu à quatre droites*. Le premier, qui est celui que représente l'équation $x^2 = ayz$, où x, y, z sont les distances d'un point variable à trois droites fixes, est facile à rapporter à deux diamètres conjugués. Fermat a donc pu le trouver sans autre méthode que l'application immédiate de théorèmes qui se trouvent dans les coniques d'Apollonius. La détermination du *lieu à quatre droites*, qui est celui que représente l'équation $xy = azu$, a demandé la transformation la plus générale d'une équation du second degré qu'on trouve dans son *Isagoge*. Apollonius, qui a déterminé ce lieu[3]), a donc été de fait en possession de cette transformation dont se sert Fermat

[1]) Ce fait fondamental n'est pas même établi dans Wallis: *De Sectionibus Conicis Tractatus* (1655), dont l'auteur se propose pourtant de rendre plus accessibles, au moyen de la représentation algébrique, les éléments de la théorie des coniques contenus dans les deux premiers livres d'Apollonius. La manière dont il s'acquitte de cette tâche montre combien on était encore en arrière des anciens quant à l'exactitude des conclusions.

[2]) *Varia Opera*, p. 153

[3]) Dans le 8me et le 9me chapitre de mon livre, j'ai essayé de restituer cette détermination d'après ses indications sur l'usage qu'on doit faire de son 3me livre.

pour déterminer les lieux solides les plus généraux. Que les anciens n'aient pas énoncé qu'une équation du second ordre représente une conique, s'explique tout simplement par la circonstance qu'ils n'étaient pas en possession de moyens commodes pour énoncer ces équations, qui se transformaient au contraire facilement en des *lieux à quatre droites*. Il s'agissait donc pour eux avant tout de la détermination de ces lieux.

M. Günther cite encore l'usage que Fermat fait des coordonnées dans sa détermination des tangentes et dans ses quadratures. La méthode des tangentes de Fermat, ainsi que sa méthode *de maximis et minimis*, premières applications du procédé qui a reçu plus tard le nom de différentiation, marque certainement un progrès de la plus haute importance, mais ce n'est pas par l'application des coordonnées qu'elle se distingue de la détermination des tangentes d'Apollonius, qui se sert à cet effet de l'équation des courbes. Quant aux quadratures et cubatures, non seulement Fermat, mais aussi les autres auteurs — par exemple Cavalieri — qui, après un intervalle de plus de 18 siècles, reprirent et continuèrent les recherches commencées par Archimède, se servaient de coordonnées; mais à cet égard on ne faisait qu'imiter Archimède. Ce fait est reconnu entièrement par Fermat, dont les remarques[1]) sur la différence entre sa méthode et celle d'Archimède ne contiennent rien sur l'usage des coordonnées, en même temps qu'elles font voir que sa parfaite connaissance des quadratures d'Archimède ne se borne pas à celle qu'Archimède a exécutée sans faire usage de coordonnées[2]).

[1]) *Varia Opera*, p. 44.

[2]) Je pense à sa première quadrature de la parabole. En me référant pour ses autres quadratures et cubatures au 20[me] chapitre de mon livre, je rappellerai pourtant ici qu'elles s'exécutent au moyen des expressions des sommes Σx et Σx^2, les x étant les nombres entiers 1, 2, 3 ... M. Günther aurait donc pu trouver dans les oeuvres d'Archimède de véritables applications d'une méthode qu'il attribue seulement à Cavalieri et à Wallis, en remarquant toutefois qu'à certaines conditions elle aurait été à la disposition d'Oresme (voir la note à la p. 387 de son mémoire déjà cité).

Les anciens savaient donc faire les mêmes applications de coordonnées qui portent M. Günther à attribuer à Fermat la découverte de la véritable utilité géométrique de cet instrument, et ils en ont fait d'autres. Je me contenterai ici de rappeler la manière dont les anciens construisaient les racines d'équations du troisième et du quatrième degré. A cet effet, ils se servaient de deux coniques dont les points d'intersection avaient pour abscisses les racines cherchées. La construction obtenue ainsi n'étant que d'une utilité médiocre pour la pratique, servait de base à une discussion des équations [1].

En ajoutant que je ne me rappelle pas un seul endroit dans la littérature géométrique de l'antiquité où une application de coordonnées qui aurait facilité essentiellement les recherches ait été négligée, je crois bien fondée ma conviction que les anciens avaient pleine conscience de l'utilité qu'a cet instrument même sans être appuyé par l'algèbre. Le grand mérite de l'*Isagoge* de Fermat est la réinvention et l'exposé net de la méthode, et le mérite immortel de la géométrie de Descartes — dont j'ai parlé moins ici parce que dans l'*Isagoge* l'usage des coordonnées est plus méthodique — est la nouvelle base algébrique qu'elle a donnée à la géométrie et à toutes les mathématiques [2].

M. Günther ne partage pas mon opinion sur la valeur des coordonnées pour les anciens. J'ose attribuer en grande partie son opinion contraire à une connaissance trop superficielle de la géométrie grecque. En effet, on ne remarquera pas les transformations de coordonnées dans le premier livre des coniques d'Apollonius, en adoptant aveuglément le malentendu connu de Chasles — dont les grands mérites de notre connaissance de la géométrie ancienne doivent être cherchés ailleurs — et en supposant avec lui qu'Apollonius n'a étudié que les sections perpendiculaires au plan de sy-

1) Voir le onzième et le douzième chapitre de mon livre.

2) J'en ai parlé dans le dernier chapitre de mon livre.

métrie du cône[1]). N'ayant pas observé qu'Apollonius a déterminé le lieu à quatre droites[2]), M. Günther n'a pu remarquer le grand rôle que jouait cette détermination dans la géométrie ancienne.

Cependant M. Günther indique expressément une autre raison de traiter d'accidentel l'usage que les géomètres grecs font des coordonnées. Il distingue trois degrés dans la connaissance des coordonnées. Dans le premier on se borne à prendre pour axes deux droites qui existent déjà dans la figure ou qu'on y choisit arbitrairement, et à y rapporter ses points. Dans le deuxième on parvient aux courbes sans encore les former d'après une loi déterminée, mais en construisant pour chaque abscisse donnée l'ordonnée correspondante, et en joignant simplement par un trait les points ainsi obtenus. On s'élève enfin au troisième et dernier degré en transformant cette série de points, qui n'étaient assujétis à aucune règle, en une autre bien définie, ou bien en établissant entre les deux variables une équation qui permet de trouver immédiatement, pour chaque valeur de x ou de y, la valeur correspondante de y ou de x. M. Günther ajoute la remarque, à laquelle il désire qu'on attribue un poids tout particulier, que dans tous les cas où l'on rencontre une conception coïncidant en apparence avec un des derniers degrés sans qu'on s'y soit élevé par le premier, il est permis seulement d'y voir un trait de génie de son auteur, mais non pas un fait qui mérite d'être appelé une anticipation du principe des coordonnées.

Commençons par admettre, pour un moment, la justesse de l'axiome historique de M. Günther sur la nécessité des trois degrés de l'échelle conduisant à la connaissance complète

---

[1]) Voir la p. 370 du mémoire de M. Günther.

[2]) l. c. p. 397. M. Günther partage à cet égard un malentendu de Descartes. On voit par une lettre de Roberval à Fermat (*Varia Opera* de Fermat p. 153) qu'il n'était pas partagé par tous les contemporains de Descartes.

des coordonnées. Alors je dis qu'il faudrait en tirer une conclusion toute différente de celle de M. Günther. En effet, nous possédons une partie des travaux des grands géomètres grecs, nous y voyons qu'ils se trouvent déjà au troisième degré et qu'ils y sont trop bien installés pour s'y être égarés seulement par un hasard. Ils doivent donc, selon l'axiome, avoir déjà parcouru les deux premiers degrés.

M. Günther aboutit à la conclusion inverse en prenant pour point de départ la supposition que les Grecs, jusqu'à Héron, n'ont pas même été en possession du premier degré; mais comment constater leur ignorance à cet égard ou par rapport au second degré? M. Günther se borne à indiquer les premiers auteurs qui nous ont conservé des preuves directes de ces degrés, mais il ne démontre pas qu'ils sont les premiers qui les aient connus, ce qui est bien nécessaire pour les conclusions qu'il en tire.

Cependant, même appliqué d'une manière plus correcte, le principe de M. Günther me semblerait peu propre à faire ressortir le véritable développement historique de la science. En prescrivant l'ordre de la succession des idées, dont la connaissance devait être le fruit de l'étude historique, il ne laisse aux historiens que le soin de trouver les dates et les noms qui marquent les différents pas connus d'avance. Ce qui donne, au contraire, à l'étude historique de la science son charme essentiel, c'est la découverte de ces pas ou degrés qui ont conduit à son état actuel. Pour les connaître il faut en étudier les états antérieurs sans opinion préconçue, et il faut considérer les connexions entre ceux qui se succèdent immédiatement avant de les mettre en rapport avec la science de notre temps.

Quant à la notion des coordonnées, le rôle qu'elles jouaient dans les travaux d'Archimède et d'Apollonius, et leur manière de les employer, seront de meilleurs guides pour la recherche des degrés inférieurs qui ont précédé la notion complète que des règles empruntées aux mathématiques modernes. On ne tardera pas à trouver un de ces degrés en remarquant la connexion intime qui existe, dans la géométrie ancienne, entre l'usage des coordonnées et cette algèbre géométrique dont on trouve les premières applications dans le second livre d'Euclide.

On a commencé [1]) par représenter des quantités abstraites par des droites; ensuite on a été conduit à représenter un produit par l'aire d'un rectangle ayant pour côtés les deux facteurs. La position du rectangle étant indifférente, on peut regarder les deux facteurs comme les coordonnées d'un sommet rapporté aux deux côtés opposés. Les opérations qu'exécutent les différents géomètres grecs au moyen de cette représentation, et qui s'étendent, dans le deuxième et le sixième livre d'Euclide, jusqu'à la résolution de l'équation du second degré, coïncident essentiellement avec le déplacement de l'origine d'un système de coordonnées. Les autres transformations de coordonnées que nous rencontrons dans la géométrie supérieure des anciens s'exécutent de même par des remaniements d'aires.

La connexion de l'algèbre géométrique avec l'invention des coordonnées est confirmée par les premières équations connues des sections coniques. La représentation d'un produit par un rectangle devait conduire à la considération des différents rectangles qui ont la même aire. Le lieu du sommet opposé à l'origine de ces rectangles est l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. Selon la tradition, déjà Ménechme s'en est servi dans sa duplication du cube, quoique la considération stéréométrique des sections d'un cône ne conduise pas à cette représentation de l'hyperbole. La figure servant, selon le premier livre d'Euclide, à transformer un carré y^2 en un rectangle px dont un côté p est donné, contient le point (x, y), qui

[1]) Voir le premier chapitre de mon livre, où, toutefois, je ne m'occupe pas en particulier de la connexion avec le développement de la notion des coordonnées.

parcourra une parabole si le carré est variable. Cette représentation d'une parabole est la seconde équation d'une conique dont se serait servi Ménechme dans sa duplication. Ce problème lui-même s'est présenté au moment où on a essayé d'étendre l'algèbre géométrique à des questions du troisième ordre[1].

Je rappellerai encore que les noms donnés par Apollonius aux trois sections coniques sont empruntés aux opérations géométriques qui servaient à la solution des équations à une inconnue des deux premiers degrés, et que ces noms expriment la connexion intime qui existe entre ces solutions et les représentations qu'il prenait pour points de départ de l'étude des propriétés des coniques. Ces représentations ne diffèrent en aucun point essentiel de celles dont on se servait avant Apollonius[2].

En rappelant que déjà les Pythagoriciens représentaient des produits par des rectangles et s'occupaient des «applications» de figures, c'est-à-dire de la solution géométrique des équations des deux premiers degrés, nous comprenons qu'à l'origine de la théorie des coniques — due en partie à l'algèbre géométrique — les savants grecs étaient en état de rapporter ces courbes à un système de coordonnées et d'en exprimer les équations. De ce germe, appartenant déjà au troisième degré de M. Günther, s'est développée une véritable connaissance de l'usage des coordonnées, à mesure que le développement de la théorie des coniques exigeait l'amélioration de l'instrument qu'on y appliquait.

Ayant trouvé le germe de l'usage des coordonnées, on peut essayer de suivre en remontant les considérations qui l'ont préparé. Il faut penser alors à la connaissance du fait que

---

[1]) Je me réfère encore au 21me chapitre de mon livre, où je traite de la première origine de la théorie des coniques. Je rappelle toutefois qu'il s'agit ici d'une époque dont on ne connaît pas assez de faits pour les ordonner d'une manière assurée.

[2]) Voir le deuxième chapitre de mon livre.

deux systèmes de droites parallèles décomposent le plan en parties qui restent toujours de la même nature. Ce fait, qui est la base de la mesure des aires planes[1]), était bien connu des Égyptiens. Les arpenteurs y ont égard en préférant de décomposer le terrain en parties rectangulaires. Cette décomposition ne se réalise que d'une manière incomplète, si le contour naturel est curviligne; mais alors la décomposition approchée contient une représentation approximative du contour, qu'elle rapporte aux coordonnées formées des deux systèmes de parallèles.

C'est un exemple d'une détermination de cette nature que cite M. Günther d'après Héron; mais il est difficile de savoir jusqu'à quelle époque on doit faire remonter cette détermination ou des déterminations semblables. Nous rappellerons à cet égard le procédé dont les Égyptiens se sont servis quatorze cents ans avant J. C. pour donner à un tableau une nouvelle échelle. On décomposait l'ancien tableau en des carrés auxquels on substituait, sur le nouveau tableau, des carrés ayant avec eux un rapport donné. Les carrés correspondants des deux tableaux devaient contenir des parties correspondantes des figures. Le carré où se trouve un point indique alors, à des fractions près du côté des carrés, les coordonnées de ce point. On a donc une véritable application de coordonnées. Sans doute une seule application est très loin de constituer une véritable notion des coordonnées; mais le procédé égyptien montre le grand âge des idées dont s'est développée la détermination conservée par Héron[2]). L'existence de ces procédés pratiques nous

---

[1]) Voir la p. 85 du nouveau livre de M. Paul la Cour, intitulé: *Historisk Mathematik.*

[2]) Je dois aux «*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*» de M. Cantor la connaissance du procédé égyptien (voir la p. 58). M. Cantor compare aussi, p. 323—324, ce procédé à celui que nous a conservé Héron; mais, chose étrange, à cet endroit où il veut rendre compte de l'usage des coordonnées dans l'antiquité, il oublie de parler de l'usage scientifique qu'en ont fait les grands géomètres.

explique la facilité avec laquelle la science grecque a inventé et développé l'usage scientifique des coordonnées dès qu'elle en a eu besoin.

Une autre préparation est due à l'astronomie. Je ne suis pas en possession de connaissances assez étendues de l'histoire de l'astronomie pour savoir si l'on peut soutenir contre M. Günther les remarques de M. Baltzer sur le grand âge des trois systèmes de coordonnées célestes, comme j'ai soutenu ses remarques sur l'usage de coordonnées par Archimède et Apollonius[1]; mais même le modeste degré de développement que leur attribue M. Günther, à l'époque des grands progrès de la géométrie grecque, suffit pour rendre possibles des suggestions réciproques entre les deux sciences quant à l'usage des coordonnées. On a une trace de ces suggestions dans les noms de longitude (*μῆκος*) et de latitude (*πλάτος*) donnés à deux coordonnées sphériques[2]. On sait qu'Hipparque faisait usage des coordonnées géographiques de ce nom; mais j'ignore l'âge des coordonnées célestes qui portent le même nom.

Je me borne à ces remarques, en laissant à ceux qui connaissent mieux que moi la littérature astronomique conservée, le soin d'entreprendre des recherches sur le développement des coordonnées astronomiques.

---

[1]) Voir les «*Berichte über die Verh. der Kgl. Sächs. Gesellsch.*», Math.-phys. Classe, Bd. XVII p. 1—6. M. Günther essaie, dans le mémoire dont je me suis occupé ici, de réfuter les deux remarques de M. Baltzer qui sont citées dans le texte. Aussi les autres remarques historiques que fait M. Baltzer à l'endroit cité offrent beaucoup d'intérêt, celle, par exemple, que Leibnitz a, le premier, donné aux abscisses et aux ordonnées le nom commun de coordonnées, ce qui est le dernier pas du développement de la notion des coordonnées.

[2]) Voir l'intéressante analyse des représentations des orbites apparentes des planètes d'Oresme que donne M. Günther aux p. 383 etc. de son mémoire.